Stieltjes Kettenbruchentwicklung zur Approximation von n !

Ac 2022

Der niederländische Mathematiker **Thomas J. Stieljes** gab 1894 eine sehr gute Formel zur Approximation von n! an:

$$\boxed{\ln(n!) = \frac{\ln(2\pi)}{2} - n + (n+\frac{1}{2})\cdot\ln(n) + p(n)}$$

Hierbei ist p(n) ein allgemeiner (unendlicher) Kettenbruch der Form

$$p(n) = \cfrac{a_0}{n + \cfrac{a_1}{n + \cfrac{a_2}{n + \cfrac{a_3}{n + \ddots}}}}$$

wobei:

a0 = 1 / 12
a1 = 1 / 30
a2 = 53 / 210
a3 = 195 / 371
a4 = 22999 / 22737
a5 = 29944523 / 19733142
a6 = 109535241009 / 48264275462
a7 = 29404527905795295658 / 9769214287853155785
a8 = 455377030420113432210116914702 / 113084128923675014537885725485
a9 = 26370812569397719001931992945645578779849 / 5271244267917980801966553649147604697542

...

Die folgenden Beispiele verwenden für p(n) jeweils die Koeffizienten a0 bis a6 !

Beispiel 1: n = 5 ;

dann ist p(5) = 173287241650879 / 10410961649811600 = 0,0166446911898878102024489 60...

ln(5!) = 4,770847052 + p(5)
= 4,770847052 + 0,0166446911898878...
= 4,787491743...

exp(ln(5!)) = 5! = exp(4,787491743...) = **120,00000000000786**

Exakter Wert: **120** (rel. Fehler < 10^{-11}) .

Beispiel 2: n = 10 ;

dann ist p(10) = 665680180763986 03 / 79908182212264 22400 = 0,00833056343336287449681 25258...

ln(10!) = 15,09608201... + p(10)
= 15,09608201... + 0,0083305634333628744968125258...
= 15,10441257...

exp(ln(10!)) = 10! = exp(15,10441257...) = **3628800.0000000084**

Exakter Wert: **3628800** (rel. Fehler < 10^{-13}) .

Beispiel 3:   n = 1000

dann ist p(1000) = 63019447564641646760827747003 / 756233395983472425028263234240000
= 0,000083333330555556349205753969...

ln(1000!) = 5912.128095154832... + p(1000)
= 5912.128095154832... + 0,000083333330555556349205753969...
= 5912.128178488163...

exp(ln(1000!)) = 1000! = exp(15912.128178488163...) = Infinity (Double).

Zur Berechnung von 1000! (als Doublewert) muss man eine Umformung vornehmen :

$$\mathbf{lg}(\mathbf{n}!) = \mathbf{ln}(\mathbf{n}!) \;/\; \mathbf{ln}(\mathbf{10}); \quad \text{dann} \quad \boxed{n! \approx 10^{frac(\lg(n!))} \cdot 10^{\mathrm{int}(\lg(n!))}}$$

beim 1.Faktor muss die gesamte Potenz ausgerechnet werden, beim 2. nur der Exponent!

Für ln(1000!) = 5912.128178488163...   ergibt sich dann :

lg(1000!) = ln(1000!) / ln(10) = 2567,6046442221...

Also 1000 ! = **4,023872600765529 ·10^{2567}** .

Genauerer Wert: 4,023872600770937·10^{2567} (rel. Fehler < 2·10^{-12}) .

Beispiel 4:   n = 100000

p(100000) = 9002728025020347075094892463313787392429 /
10803273630060427402213043497447802617632000000
= 8.33333333330555555555634920634914683E-7

100000 ! = **2,8242294074777115·10^{456573}**.

Beispiel 5:   n = 1000000

p(1000000) = 63019096140351424295222346424724316036511747003 /
756229153684242299181124291304482080546183234240000000
BruchNäherung = 8.33333333333305555555555563492063492E-8

1000000 ! = **8,263931668544735·10^{5565708}**.
Genauerer Wert: 8,2639316883312400623766461·10^{5565708}

weitere Näherungen:

10 000 000 ! = 1.202423380759345·10^65657059
100 000 000 ! = 1.617203942801948·10^756570556
1 000 000 000 ! = 9.904606168675254·10^8565705522
10 000 000 000 ! = 2.325825610798525·10^95657055186
100 000 000 000 ! = 3.7495108043672256·10^1056570551815
1 000 000 000 000 ! = 1.4011491736394115·10^11565705518103